

Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра моделирования электромеханических и компьютерных
систем

Панченко Маргарита Станиславовна

Магистерская диссертация

Анализ и оптимизация явных методов
Рунге – Кутты повышенного порядка точности

Направление 03.04.01

«Прикладные математика и физика»

Магистерская программа «прикладная информатика»

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Кривовичев Г. В.

Санкт-Петербург

2018

Содержание

Введение	3
Глава 1. Обзор литературы	5
1.1. Задача Коши	5
1.2. Метод рядов Тейлора	5
1.3. Явные методы Рунге–Кутты	6
1.4. Область устойчивости	10
1.5. Явные методы повышенного порядка точности	11
Глава 2. Стабилизация методов повышенного порядка точности	16
2.1. Подход к стабилизации	16
2.2. Функции устойчивости	17
2.3. Результаты оптимизации	22
Глава 3. Решение тестовых задач	29
3.1. Исследование устойчивости разностных схем	29
3.2. Исследование сходимости	35
Заключение	39
Список литературы	40

Введение

Задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений описываются разные процессы в науке и технике. Только в малом числе возможных случаев можно получить ее аналитическое решение. В связи с этим разработка и исследование численных методов решения задачи Коши в настоящее время являются актуальными в вычислительной математике.

Необходимость в решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений возникает и при дискретизации уравнений в частных производных методом прямых. В этом случае становится особенно актуальной проблема устойчивости метода. Как правило, число неизвестных в таких системах совпадает с числом узлов сетки, так что они имеют большую размерность. В связи с этим, для подобных систем предпочтительно использовать явные методы, более простые и менее затратные в реализации, но, как правило, условно устойчивые.

В Главе 1 приведен обзор литературы: рассматриваются некоторые численные методы решения задачи Коши, а именно: метод рядов Тейлора, явные методы Рунге – Кутты. Рассматриваются такие понятия, как порядок точности и число этапов метода и их зависимость от параметров метода. Рассмотрена процедура построения методов. Приводятся определения функции устойчивости и области устойчивости. Приводятся формулы для методов повышенного порядка точности, построенных с использованием производных правых частей однородного дифференциального уравнения. Также в этой главе поставлены цель работы и задачи, необходимые для достижения этой цели.

В Главе 2 рассматриваются явные методы Рунге – Кутты повышенного порядка точности. Описывается выбранный подход к стабилизации методов

путем максимизации площади области устойчивости или ее протяженности по отрицательной вещественной полуоси. Определяются входные параметры. Приводится наглядное сравнение функций устойчивости обычных методов и методов повышенного порядка точности. Показывается, какие параметры выбираются в качестве входных. Проводится решение задач максимизации и для визуального сравнения приводятся графики границ областей устойчивости, соответствующих оптимальным параметрам, и значениям параметров, указанным в литературе.

В Главе 3 при решении тестовых задач показано, что предложенные подходы к максимизации площади и протяженности области устойчивости действительно позволяют улучшать практическую устойчивость методов. При исследовании сходимости построенных разностных схем показывается, что погрешность численного решения уменьшается при измельчении сетки.

Глава 1. Обзор литературы

1.1. Задача Коши

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения имеет следующий вид:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad t \in (0; T], \quad (1)$$

$$y(0) = y_0, \quad (2)$$

где $y : [0; T] \rightarrow R$, $f : (0; T] \times R \rightarrow R$, $y_0 \in R$.

Следует заметить, что результаты, которые можно получить при построении численных методов для задачи (1)–(2), естественно можно распространить на случай системы уравнений.

1.2. Метод рядов Тейлора

Решить задачу (1)–(2) аналитически удастся лишь в малом числе возможных случаев, например, для специальных типов уравнений. По этой причине существуют приближенные способы решения. Один из таких методов — метод рядов Тейлора. Он основан на представлении искомой функции $y(t)$ в виде отрезка ряда Тейлора [1].

Рассмотрим разбиение отрезка $t \in (0; T]$ следующими точками:

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T.$$

Полученный набор точек называется сеткой, а точки t_i — узлами сетки.

Предполагается, что правая часть $f(t, y(t))$ уравнения (1) имеет непрерывные частные производные до некоторого порядка k . В следствие этого искомое решение $y(t)$ имеет непрерывные производные до порядка $k+1$ включительно.

Тогда по формуле Тейлора решение в узле t_1 представляется таким образом:

$$y(t_1) \approx y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2}y''_0 + \dots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}_0, \quad (3)$$

где $y_0^{(i)} = y^{(i)}(0)$, $h = t_1 - t_0$.

Производные в правой части (3) могут быть найдены следующим образом:

$$y'_0 = f(0, y_0),$$

$$y''_0 = \{f'_t + ff'_y\},$$

$$y'''_0 = \{f''_{tt} + 2ff''_{ty} + f^2f''_{yy} + (f'_t + ff'_y)f'_y\}.$$

.....

Весомым недостатком данного метода является то, что при увеличении порядка k выражения для производных становятся более громоздкими.

1.3. Явные методы Рунге–Кутты

Карлом Рунге совместно с Мартином Куттой был предложен следующий подход, который основан на найденном приближенном значении $y_j \approx y(t_j)$ решения $y = y(t)$ задачи (1)–(2) и вычислении приближенного решения y_{j+1} в следующем узле $t_{j+1} = t_j + h$.

Приближенное решение рассчитывается по формуле:

$$y_{j+1} \approx y_j + \sum_{i=1}^m p_i K_i(h). \quad (4)$$

Функции $K_i(h)$ задаются следующим образом:

$$K_1(h) = hf(t_j, y(t_j)),$$

$$K_2(h) = hf(t_j + \alpha_2 h, y(t_j) + \beta_{21} K_1(h)),$$

$$K_3(h) = hf(t_j + \alpha_3 h, y(t_j) + \beta_{31}K_1(h) + \beta_{32}K_2(h)),$$

$$\begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ K_m(h) = hf \left(t_j + \alpha_m h, y(t_j) + \sum_{l=1}^{m-1} \beta_{ml} K_l(h) \right), \end{array}$$

где m – число этапов метода.

Данный метод определяется набором параметров $p_i, \alpha_k, \beta_{kl}, i = \overline{1, m}, k = \overline{2, m}, l = \overline{1, k-1}$, которые находятся таким образом, чтобы (4) совпадало с разложением (3) до максимально возможного порядка k при фиксированном числе этапов m (см. [1]). Локальная погрешность конкретного метода определяется следующим образом:

$$\rho_{qm}(h) = y(t_j + h) - y_j - \sum_{q=1}^m p_q K_q, \quad (5)$$

где $y(t_j + h)$ – точное решение. Если для (5) справедливо, что при $h \rightarrow 0$:

$$\rho_m(h) = \frac{\rho^{s+1}(\theta)}{(s+1)!} h^{s+1} + o(h^{s+1}),$$

где $\rho_m(0) = 0, \rho'_m(0) = 0, \dots, \rho_m^{(s)}(0) = 0$, то метод имеет порядок точности s .

В таблице 1 [2] можно увидеть, как относится число этапов метода к порядку его точности.

m	1	2	3	4	6	7	9	11
s	1	2	3	4	5	6	7	8

Таблица 1. Зависимость порядка точности обычного метода Рунге – Кутты от числа его этапов

Таким образом, параметры функций $K_i(h)$ (4) задаются так, чтобы обеспечивается максимальный порядок точности при фиксированном числе этапов m , то есть при фиксированном числе вычислений функции f .

Для примера рассмотрим построение одноэтапного метода:

$$y(t_j + h) \approx y_j + p_1 K_1(t_j, y_j) = y_j + p_1 h f(t_j, y_j).$$

$$\rho_1(h) = y(t_j + h) - y_j - p_1 h f(t_j, y_j),$$

при $h = 0$:

$$\rho_1(0) = y(t_j) - y_j - p_1 \cdot 0 = 0.$$

$$\rho_1'(h) = y'(t_j + h) - p_1 f(t_j, y_j) = f(t_j + h, y(t_j + h)) - p_1 f(t_j, y_j).$$

При $h = 0$:

$$\rho_1'(0) = f(t_j, y_j) - p_1 f(t_j, y_j) = (1 - p_1) f(t_j, y_j).$$

$\rho_1'(0) = 0$, следовательно, $1 - p_1 = 0$, тогда $p_1 = 1$. Возникает вопрос о том, будет ли достигаться второй порядок точности:

$$\rho_1'' = \left(\frac{\partial f(t_j + h, y(t_j + h))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_j + h, y(t_j + h))}{\partial y} y'(t_j + h) \right).$$

При $h = 0$:

$$\rho_1''(0) = \left(\frac{\partial f(t_j, y_j)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_j, y_j)}{\partial y} f(t_j, y_j) \right).$$

Таким образом, в общем случае $\rho_1''(0) \neq 0$, следовательно при $m = 1$ максимально возможный порядок точности равен 1.

Рассмотрим построение двухэтапного метода:

$$y(t_j + h) \approx y_j + p_1 h f(t_j, y_j) + p_2 h f(t_j + \alpha_2 h, y_j + \beta_{21} h f(t_j, y_j)),$$

$$\rho_2(h) = y(t_j + h) - y_j - p_1 h f(t_j, y_j) - p_2 h f(t_j + \alpha_2 h, y_j + \beta_{21} h f(t_j, y_j)).$$

Здесь у метода имеется уже 4 параметра: $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$.

Обозначим $t_j(h) = t_j + \alpha_2 h$, $y_j(h) = y_j + \beta_{21} h f(t_j, y_j)$. Тогда

$$\rho_2(0) = y(t_j) - y_j = 0.$$

$$\begin{aligned} \rho_2'(h) = & y'(t_j + h) - p_1 f(t_j, y_j) - p_2 f(t_j(h), y_j(h)) - \\ & - p_2 h \left(\frac{\partial f(t_j(h), y(t_j(h)))}{\partial t} \alpha_2 + \frac{\partial f(t_j(h), y(t_j(h)))}{\partial y} \frac{dy(t_j(h))}{dt} \beta_{21} \right), \end{aligned}$$

при $h = 0$: $\rho_2'(0) = (1 - p_1 - p_2)f(t_j, y_j)$, следовательно, $1 - p_1 - p_2 = 0$,

$$\begin{aligned} \rho_2''(h) = & \frac{\partial f(t_j + h, y(t_j + h))}{\partial t} + f(t_j + h, y(t_j + h)) \frac{\partial f(t_j + h, y(t_j + h))}{\partial y} - \\ & - 2p_2 \left(\frac{\partial f(t_j(h), y_j(h))}{\partial t} \alpha_2 + \beta_{21} \frac{\partial f(t_j(h), y_j(h))}{\partial y} f(t_j(h), y_j(h)) \right) - \\ & - p_2 h \left(\frac{\partial f(t_j(h), y_j(h))}{\partial t} \alpha_2 + \beta_{21} \frac{\partial f(t_j(h), y_j(h))}{\partial y} f(t_j + h, y(t_j + h)) \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho_2''(h) = & (1 - 2p_2\alpha_2)f_t'(t_j + h, y(t_j + h)) + \\ & + (1 - 2p_2\beta_{21})f_y'(t_j + h, y(t_j + h))f(t_j + h, y(t_j + h)) + \\ & + hp_2 \left(\frac{\partial f(t_j + h, y(t_j + h))}{\partial t} \alpha_2 + \beta_{21} \frac{\partial f(t_j + h, y(t_j + h))}{\partial y} f(t_j + h, y(t_j + h)) \right). \end{aligned}$$

Следовательно, $\rho_2''(0) = 0$ тогда и только тогда, когда $1 - 2p_2\alpha_2 = 0$ и $1 - 2p_2\beta_{21} = 0$. Имеем систему уравнений для определения параметров (условия порядка):

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ 2p_2\alpha_2 = 1, \\ 2p_2\beta_{21} = 1. \end{cases}$$

Из нее следует, что $p_2 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ и $\beta_{21} \neq 0$. Имеем систему из трех уравнений относительно четырех неизвестных. Пусть α_2 – входной параметр. Тогда получаем:

$$p_2 = \frac{1}{2\alpha_2}, \quad p_1 = 1 - \frac{1}{2\alpha_2}, \quad \beta_{21} = \alpha_2.$$

Известно [2], что за счет выбора параметров нельзя добиться третьего порядка точности при числе этапов $m = 2$.

1.4. Область устойчивости

Устойчивость численных методов систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследуется на примере задачи Коши следующего вида [3]:

$$\dot{y} = \lambda y, \quad y(0) = 1. \quad (6)$$

Одношаговый численный метод, применяемый к решению уравнения (6), можно записать в следующем виде:

$$y_{n+1} = \mathcal{R}(z)y_n, \quad z = \lambda h,$$

где $\mathcal{R}(z)$ – функция устойчивости [4]. Данная задача известна как тестовая задача Далквиста [3]. Тогда множество

$$D = \{z \in \mathbb{C}, |\mathcal{R}(z)| \leq 1\}$$

называется областью устойчивости данного метода.

Функция устойчивости обычного метода Рунге – Кутты из двух этапов будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{R}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2},$$

а для метода из трех этапов:

$$\mathcal{R}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}.$$

Как можно заметить, для методов вида (4) за счет выбора параметров никак нельзя влиять на область устойчивости.

1.5. Явные методы повышенного порядка точности

В работе Гекена и Джонсона в 2000 году [4] был предложен подход к построению метода повышенного порядка точности, основанного на использовании первой производной функции f в случае скалярного уравнения и матрицы Якоби в случае системы уравнений.

В данном методе в представлении по формуле (4) функции $K_i(h)$ задаются уже иным способом, который отличается от обычного дополнительными слагаемыми:

$$K_1(h) = hf(t_j, y(t_j)), \quad (7)$$

$$K_2(h) = hf(t_j + \alpha_{21}h + \alpha_{22}h^2 f'_y, y(t_j) + \beta_{21}K_1(h) + \beta_{22}hK_1(h)f'_y),$$

$$K_3(h) = hf(t_j + \alpha_{31}h + \alpha_{32}h^2 f'_y, y(t_j) + \beta_{31}K_1(h) + \beta_{32}K_2(h) + \\ + \beta_{33}hK_1(h)f'_y + \beta_{34}hK_2(h)f'_y),$$

.....

$$K_m(h) = hf\left(t_j + \alpha_{m1}h + \alpha_{m2}h^2 f'_y, y(t_j) + \sum_{l=1}^{m-1} (\beta_{ml} + hf'_y \beta_{m(l+m-1)})K_l(h)\right).$$

Достоинство методов связано с тем, что их порядок точности как минимум на единицу больше, чем число этапов, в отличие от обычных методов [4].

По аналогии с обычным двухэтапным методом Рунге–Кутты строится и двухэтапный метод повышенного порядка точности (рассмотрим для случая стационарного уравнения $y' = f(y)$):

$$y_{n+1} = y_n + p_1 K_1(h) + p_2 K_2(h),$$

$$K_1(h) = hf(y_n),$$

$$K_2(h) = hf(y_n + \beta_{21}K_1(h) + h\beta_{22}f'_y(y_n)K_1).$$

В отличие от обычного метода такой метод имеет третий порядок. Для нахождения четырех параметров метода $p_1, p_2, \beta_{21}, \beta_{22}$ имеем систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ p_2 \beta_{21} = \frac{1}{2}, \\ p_2 \beta_{22} = \frac{1}{6}, \\ p_2 \beta_{21}^2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Как можно видеть $p_2 \neq 0, \beta_{21} \neq 0, \beta_{22} \neq 0$. Решение данной системы $p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{3}{4}, \beta_{21} = \frac{2}{3}, \beta_{22} = \frac{2}{9}$ — единственное.

Заметим, что предложенные в [4] методы пока недостаточно исследованы.

Еще в нескольких работах были предложены методы, использующие вторые [5] и третьи [6] производные решения.

Методы, использующие производные, можно разделить на две большие группы. Первая группа методов «с внутренними стадиями» — те методы, в которых производные используются только при вычислении функции f (правой части). Вторая группа методов «с внешними стадиями» — те, в которых производные используются еще и в сумме для вычисления решения.

Характерный пример методов первого типа «с внутренними стадиями» — это методы, основанные на использовании первой производной функции f , которые были рассмотрены ранее. Их вычислительные формулы имеют вид:

$$y(t_j + h) \approx y(t_j) + \sum_{i=1}^m p_i K_i(h), \quad (8)$$

а функции $K_i(h)$ задаются выражениями (7).

Далее будут рассматриваться методы второй группы «с внешними стадиями», в которых производные используются еще и в суммах, применяемых для

получения значений решения.

Первая подгруппа этих методов построена с использованием вторых производных решения [5]. Рассмотрим трехэтапный метод, который имеет пятый порядок точности. Вычислительные формулы задаются следующим образом:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n) + h^2\hat{b}_1g(y_n) + h^2\hat{b}_2g(Y_2) + h^2\hat{b}_3g(Y_3), \quad (9)$$

$$g = f'(y)f,$$

$$Y_1 = y_n,$$

$$Y_2 = y_n + hc_2f(y_n) + h^2\hat{a}_{21}g(y_n),$$

$$Y_3 = y_n + hc_3f(y_n) + h^2\hat{a}_{31}g(y_n) + h^2\hat{a}_{32}g(Y_2).$$

Теперь рассмотрим метод той же подгруппы, который имеет четыре этапа и шестой порядок точности:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n) + h^2\hat{b}_1g(y_n) + h^2\hat{b}_2g(Y_2) + h^2\hat{b}_3g(Y_3) + h^2\hat{b}_4g(Y_4), \quad (10)$$

$$Y_1 = y_n,$$

$$Y_2 = y_n + hc_2f(y_n) + h^2\hat{a}_{21}g(y_n),$$

$$Y_3 = y_n + hc_3f(y_n) + h^2\hat{a}_{31}g(y_n) + h^2\hat{a}_{32}g(Y_2),$$

$$Y_4 = y_n + hc_4f(y_n) + h^2\hat{a}_{41}g(y_n) + h^2\hat{a}_{42}g(Y_2) + h^2\hat{a}_{43}g(Y_3).$$

Следующая подгруппа методов построена с использованием третьей производной решения [6].

Рассмотрим двухэтапный метод, имеющий четвертый порядок точности. Его вычислительные формулы имеют вид:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n) + \frac{h^2}{2}g(y_n) + h^3\hat{b}_1\hat{g}(y_n) + h^3\hat{b}_2\hat{g}(Y_2), \quad (11)$$

$$g = f'f, \quad \hat{g} = (f')^2f,$$

$$Y_1 = y_n,$$

$$Y_2 = y_n + hc_2f(y_n) + \frac{h^2c_2^2}{2}g(y_n) + \frac{h^3c_2^3}{6}\hat{g}(y_n).$$

Еще один метод этой подгруппы — трехэтапный, он имеет шестой порядок точности. Вычислительные формулы этого метода задаются выражением:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n) + \frac{h^2}{2}g(y_n) + h^3\hat{b}_1\hat{g}(y_n) + h^3\hat{b}_2\hat{g}(Y_2) + h^3\hat{b}_3\hat{g}(Y_3), \quad (12)$$

$$g(y) = f'_y f(y), \quad \hat{g}(y) = (f'_y)^2 f(y),$$

$$Y_1 = y_n,$$

$$Y_2 = y_n + hc_2f(y_n) + \frac{h^2c_2^2}{2}g(y_n) + \frac{h^3c_2^3}{6}\hat{g}(y_n),$$

$$Y_3 = y_n + hc_3f(y_n) + \frac{h^2c_3^2}{2}g(y_n) + h^3\left(\frac{c_3^3}{6} - \hat{a}_{32}\right)\hat{g}(y_n) + h^3\hat{a}_{32}\hat{g}(Y_2).$$

Рассмотрим метод той же подгруппы — из четырех этапов, имеющий восьмой порядок точности. Его вычислительные формулы имеют вид:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n) + \frac{h^2}{2}g(y_n) + h^3\hat{b}_1\hat{g}(y_n) + h^3\hat{b}_2\hat{g}(Y_2) + h^3\hat{b}_3\hat{g}(Y_3), \quad (13)$$

$$Y_1 = y_n,$$

$$Y_2 = y_n + hc_2f(y_n) + \frac{h^2c_2^2}{2}g(y_n) + \frac{h^3c_2^3}{6}\hat{g}(y_n),$$

$$Y_3 = y_n + hc_3f(y_n) + \frac{h^2c_3^2}{2}g(y_n) + h^3\left(\frac{c_3^3}{6} - \hat{a}_{32}\right)\hat{g}(y_n) + h^3\hat{a}_{32}\hat{g}(Y_2),$$

$$Y_4 = y_n + hc_4f(y_n) + \frac{h^2c_4^2}{2}g(y_n) + h^3\left(\frac{c_4^3}{6} - \hat{a}_{42} - \hat{a}_{43}\right)\hat{g}(y_n) + h^3\hat{a}_{42}\hat{g}(Y_2) + h^3\hat{a}_{43}\hat{g}(Y_3).$$

Необходимо отметить, что данные методы и их устойчивость недостаточно исследованы. Так как тема связана с улучшением устойчивости явных методов Рунге–Кутты, то **цель** работы состоит в разработке и исследовании

метода улучшения устойчивости явных методов Рунге–Кутты повышенного порядка точности. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) Предложить методы улучшения устойчивости, основанные на максимизации площади области устойчивости и её протяженности по отрицательной вещественной полуоси.
- 2) Для различных явных методов определить значения свободных параметров, при которых площади и протяженности являются максимальными.
- 3) Провести исследование устойчивости разностных схем для задач математической физики, основанных на применении методов при оптимальных значениях параметров, и сравнить их с другими разностными схемами.

Глава 2. Стабилизация методов повышенного порядка точности

В настоящей работе внимание уделяется построению методов улучшения устойчивости, которые основываются на максимизации отдельно как площади области устойчивости, так и ее протяженности по отрицательной вещественной полуоси.

2.1. Подход к стабилизации

В работе предлагаются подходы, при которых параметры будут выбираться таким образом, чтобы площадь области устойчивости метода или ее протяженность по отрицательной вещественной полуоси оказались наибольшими. Задача о поиске оптимальных параметров ставится следующим образом — пусть известно множество, которому принадлежат значения параметров, предполагается, что это множество является параллелепипедом. Пределы изменения параметров метода \underline{a}_n и \bar{a}_n определяются в ходе вычислительных экспериментов.

Оптимальным набором параметров в первом случае будет считаться тот, при котором площадь области устойчивости является наибольшей:

$$\mathbf{a}^* = \arg \sup_{\mathbf{a} \in A} S(\mathbf{a}), \quad (14)$$

где

$$S = \iint_{D(\mathbf{a})} dx dy,$$

а во втором — при котором максимизируется её протяженность по отрицательной вещественной полуоси:

$$\mathbf{a}^{**} = \arg \sup_{\mathbf{a} \in A} L(\mathbf{a}), \quad (15)$$

где

$$L = \int_{-L(\mathbf{a})}^0 dx.$$

При этом имеется определенная сложность — неизвестен вид аналитической зависимости площади S и протяженности L от параметров. Можно вычислять только их значения при заданных параметрах. Поэтому для поиска наибольшего значения можно применять только методы, не использующие производные.

При расчетах использовался метод простейшего случайного поиска. Его суть заключается в том, что в области изменения параметров $[\underline{a}_n; \bar{a}_n]$ задается последовательность точек:

$$\xi_n = (\bar{a}_n - \underline{a}_n)\gamma_n + \underline{a}_n, \quad (16)$$

где γ_n — равномерно распределенная случайная величина на отрезке $[0; 1]$. В каждой из этих точек вычисляется значение функции $S(\mathbf{a})$ и находится точка \mathbf{a}^* , в которой $S(\mathbf{a}^*) = \sup S(\mathbf{a})$ [7]. Аналогично находится и точка \mathbf{a}^{**} , в которой $L(\mathbf{a}^{**}) = \sup L(\mathbf{a})$.

Для поиска наибольшего значения написана программа в среде MATLAB, случайная величина γ_n в (16) задается с помощью функции $rand()$. Данный метод был выбран, так как он простой в реализации, может применяться в пространствах любой размерности, и потому что область, которой принадлежат значения параметров (параллелепипед), хорошо подходит для его применения.

2.2. Функции устойчивости

Нахождение оптимальных параметров для рассматриваемых методов осуществлялось следующим образом. Для методов, взятых из статей [4, 5, 6] и

приведенных в пункте 1.5 данной работы, выписывались функции устойчивости. Для построения методов в статьях рассматриваются недоопределенные системы, в которых некоторые параметры полагаются входными для доопределения системы. Ниже будут приведены выражения для функций устойчивости методов, рассматриваемых в данной работе. Представлено наглядное сравнение с функциями устойчивости обычных методов, а так же приведены те параметры, которые будут подаваться на вход при двух различных методах стабилизации.

Сначала рассмотрим метод первой группы «с внутренними стадиями»(8), он основан на использовании первой производной функции f .

Один параметр системы уравнений для построения метода полагается входным. В качестве такого параметра был выбран параметр α_{21} [4]. В отличие от обычных методов Рунге – Кутты, для которых у метода из трех этапов порядок точности равен 3, у рассматриваемого метода порядок точности равен 4.

Рассмотрим задачу о нахождении оптимальных параметров трехэтапного метода. Для сравнения ниже представлены выражения для функций устойчивости методов четвертого порядка. Функция устойчивости обычного метода:

$$\mathcal{R} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4. \quad (17)$$

Функция устойчивости метода повышенного порядка точности:

$$\mathcal{R} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + p_3\beta_{34}\beta_{22}z^5. \quad (18)$$

Как можно видеть, у функции устойчивости (18) есть слагаемое, которое зависит от параметров, то есть за счет выбора параметров можно влиять на площадь и протяженность области устойчивости методов повышенного порядка точности.

Теперь будем рассматривать методы второй группы «с внешними стадиями». И первая подгруппа этих методов построена с использованием вторых производных [5].

Рассматривается трехэтапный метод, имеющий пятый порядок точности. Вычислительные формулы задаются выражением (9). Здесь в качестве входного выступает параметр c_3 [5]. Для сравнения приведены выражения для функции устойчивости обычного метода (19) и метода повышенного порядка точности (20):

$$\mathcal{R} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{720}z^6, \quad (19)$$

$$\mathcal{R} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{5c_3 - 3}{1200(2c_3 - 1)}z^6. \quad (20)$$

Как можно видеть, у функции устойчивости (20) есть слагаемое, которое зависит от параметров, то есть за счет выбора параметров вновь можно влиять на площадь и протяженность области устойчивости такого метода.

Теперь рассмотрим метод той же подгруппы, который имеет четыре этапа и шестой порядок точности (10). Здесь в качестве входных параметров выступают параметры c_3, c_4 [5]. Для сравнения приведены выражения для функции устойчивости обычного метода (21) и метода повышенного порядка точности (22):

$$\mathcal{R} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{5040}z^7, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{720}z^6 - \\ - \frac{(5c_3c_4 - 4c_3 + 3 - 4c_4)(3c_4 - 2)}{2160(-5c_4 + 5c_4^2 + 1)}z^7 - \\ - \frac{(5c_3c_4 - 4c_3 + 3 - 4c_4)(3c_4 - 2)(2 - 3c_4 - 3c_3 + 5c_3c_4)}{4320(-5c_4 + 5c_4^2 + 1)(10c_3c_4 - 5c_3 + 3 - 5c_4)}z^8. \end{aligned} \quad (22)$$

Вновь можно видеть, у функции устойчивости (22) также есть слагаемые, которые зависят от параметров.

Следующая подгруппа методов построена с использованием третьей производной решения [6]. Рассмотрим двухэтапный метод, имеющий четвертый порядок точности. Вычислительные формулы задаются выражением (11). Входной параметр c_2 [6].

Ниже приведены выражения для функций устойчивости методов четвертого порядка. Функция устойчивости обычного метода:

$$\mathcal{R} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4. \quad (23)$$

Функция устойчивости метода повышенного порядка точности:

$$\mathcal{R} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{c_2}{48}z^5 + \frac{c_2^2}{144}z^6. \quad (24)$$

У функции устойчивости (24) есть слагаемые зависящие от входного параметра.

Следующий метод этой подгруппы — трехэтапный, имеет шестой порядок точности. Его вычислительные формулы задаются выражением (12). Входные параметры c_2, \hat{a}_{32} [6]. Ниже приведены выражения для функций устойчивости методов шестого порядка. Функция устойчивости обычного метода:

$$\mathcal{R} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{5040}z^7. \quad (25)$$

Функция устойчивости метода повышенного порядка точности:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{720}z^6 + \\ + \frac{(5c_2 - 2)^3 c_2 \hat{a}_{32}}{120(2c_2 - 1)(5c_2^2 - 4c_2 + 1)} z^7 + \frac{(5c_2 - 2)^3 c_2^2 \hat{a}_{32}}{240(2c_2 - 1)(5c_2^2 - 4c_2 + 1)} z^8 + \\ + \frac{(5c_2 - 2)^3 c_2^3 \hat{a}_{32}}{720(2c_2 - 1)(5c_2^2 - 4c_2 + 1)} z^9. \end{aligned} \quad (26)$$

В функции устойчивости метода повышенного порядка точности (26) вновь есть слагаемые, зависящие от параметров.

Далее рассмотрим четырехэтапный метод той же подгруппы, имеющий восьмой порядок точности. Его вычислительные формулы задаются выражением (13). В качестве входного выступает параметр c_2 [6].

Ниже приведены выражения для функций устойчивости методов 8 порядка. Функция устойчивости обычного метода:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{40320}z^8 + \\ + \frac{1}{362880}z^9 + \frac{1}{3628800}z^{10} + \frac{1}{39916800}z^{11}. \end{aligned} \quad (27)$$

Функция устойчивости метода повышенного порядка точности:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{40320}z^8 + \\ + \left(\frac{c_2}{120960} + \frac{c_3}{120960} - \frac{c_2c_3}{30240} \right) z^9 + \frac{(4c_2 - 1)(8c_4 - 5)}{6773760(5c_2c_4 - 2c_2 - 2c_4 + 1)} z^{10} + \\ + \frac{(4c_2 - 1)(8c_4 - 5)c_2}{13547520(5c_2c_4 - 2c_2 - 2c_4 + 1)} z^{11} + \frac{(4c_2 - 1)(8c_4 - 5)c_2^2}{40642560(5c_2c_4 - 2c_2 - 2c_4 + 1)} z^{12}. \end{aligned} \quad (28)$$

У функции устойчивости (28) также есть слагаемые, зависящие от параметров.

2.3. Результаты оптимизации

В данной работе, как было уже описано ранее, оптимизация проходит по двум различным путям: максимизация площади области устойчивости или ее протяженности по отрицательной вещественной полуоси. В данном параграфе будут представлены результаты расчетов. Приводятся параметры для обоих случаев и наглядные графики сравнения областей устойчивости методов.

Для трехэтапного метода [4] первой группы «с внутренними стадиями», который имеет четвертый порядок точности, с вычислительными формулами (8) и функцией устойчивости (18) были найдены следующие оптимальные значения входных параметров:

$$\alpha_{21}^* = 0.58254317989374, \quad \alpha_{21}^{**} = 0.564847458610112,$$

где α_{21}^* — параметр, при котором площадь области устойчивости является наибольшей (14), а α_{21}^{**} — при котором максимизируется ее протяженность (15).

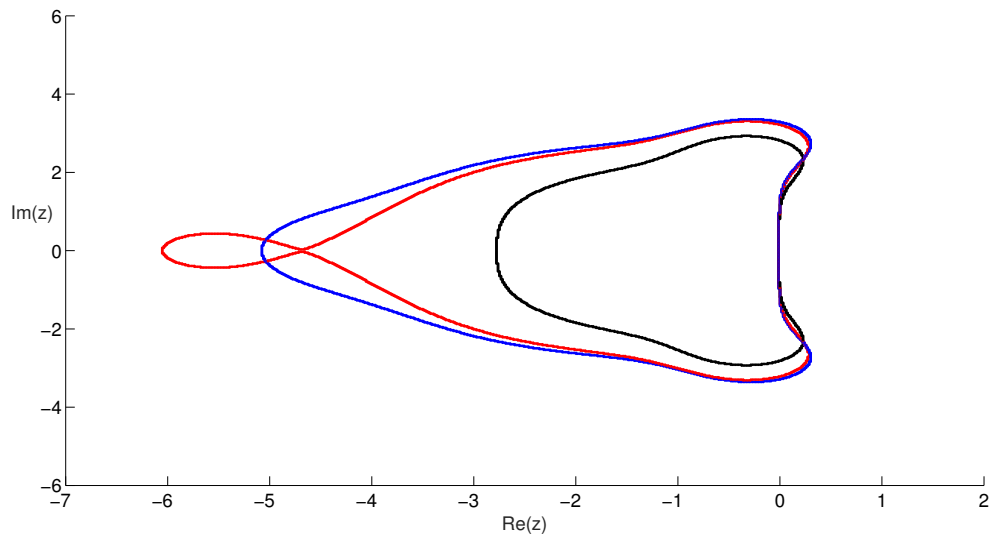


Рис. 1. Границы областей устойчивости методов 4 порядка. Синяя кривая — 3-этапный метод повышенного порядка точности при оптимальном значении α_{21} по площади области, красная кривая — по протяженности, черная — 4-этапный метод Рунге–Кутты

На рис. 1 для сравнения представлены границы областей устойчивости методов четвертого порядка. Как можно видеть, площадь и протяженность области устойчивости трехэтапного метода повышенного порядка точности больше, чем площадь области устойчивости обычного четырехэтапного метода.

Аналогично будут представлены методы второй группы «с внешними стадиями». Метод первой подгруппы [5] этой группы — трехэтапный, имеет пятый порядок точности, с вычислительными формулами (9) и функцией устойчивости (20). Для данного метода были найдены оптимальные значения входных параметров:

$$c_3^* = 0.660901376287224, \quad c_3^{**} = 0.653654793201247.$$

На рис. 2 для сравнения представлены границы областей устойчивости методов пятого порядка.

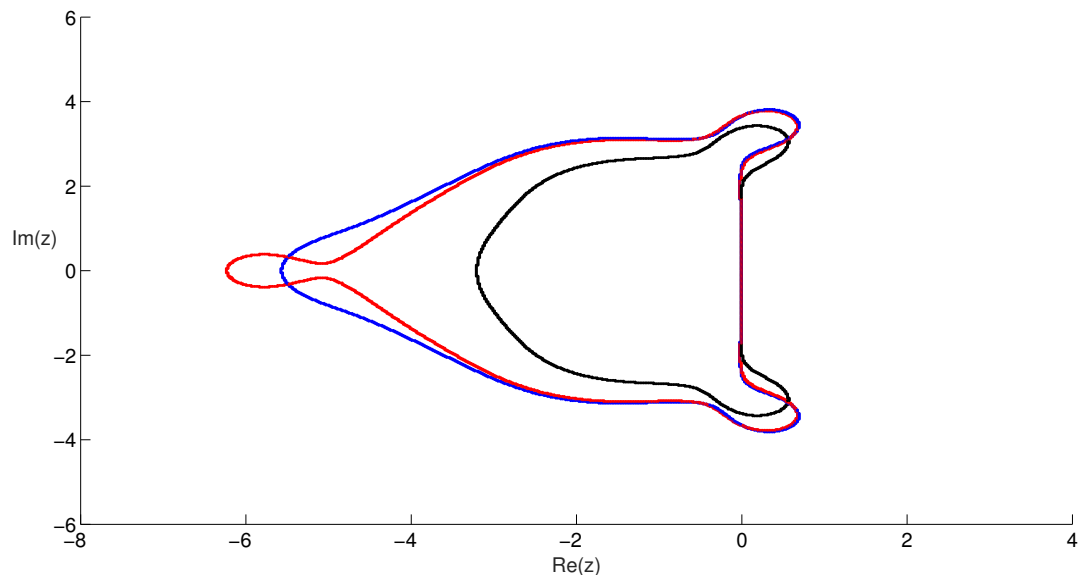


Рис. 2. Границы областей устойчивости методов 5 порядка. Синяя кривая — 3-этапный метод повышенного порядка точности при оптимальном значении c_3 по площади области, красная кривая — по протяженности, черная — 6-этапный метод Рунге–Кутты

Как можно видеть, площадь и протяженность областей устойчивости трехэтапных методов повышенного порядка точности вновь больше, чем площадь и протяженность области устойчивости обычного шестиэтапного метода.

Следующий метод этой же подгруппы [5] имеет четыре этапа и шестой порядок точности, его вычислительные формулы и функция устойчивости задаются как (10) и (22) соответственно. Здесь были получены следующие оптимальные значения входных параметров:

$$c_3^* = 0.340447119593046, \quad c_4^* = 0.744735038301271;$$

$$c_3^{**} = 0.546401892991887, \quad c_4^{**} = 0.957514350171183.$$

На рис. 3 для сравнения представлены границы областей устойчивости методов шестого порядка.

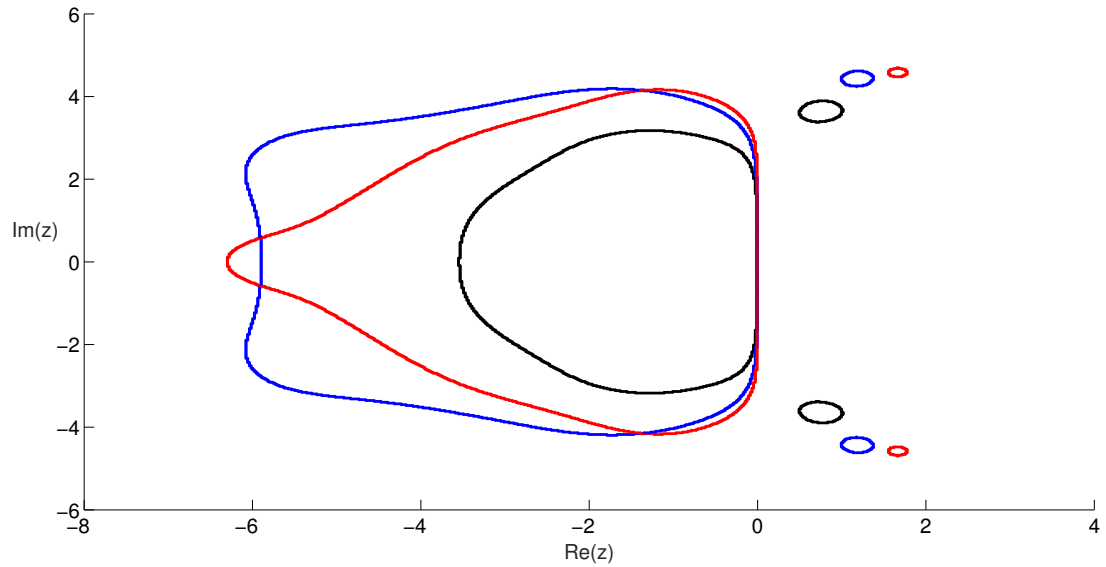


Рис. 3. Границы областей устойчивости методов 6 порядка. Синяя кривая — 4-этапный метод повышенного порядка точности при оптимальных значениях c_3, c_4 по площади области, красная кривая — по протяженности, черная — 7-этапный метод Рунге–Кутты

Как можно видеть, аналогично предыдущим случаям, площадь и протяженность областей устойчивости трехэтапных методов повышенного порядка больше, чем площадь и протяженности области устойчивости обычного семиэтапного метода.

Рассмотрим результаты, полученные для методов, основанных на использовании третьих производных [6]. Первый метод этой группы — двухэтапный, имеет четвертый порядок точности. Его вычислительные формулы задаются выражением (11), функция устойчивости имеет вид (24). Оптимальные значения входных параметров для данного метода:

$$c_2^* = 0.292660744162042, \quad c_2^{**} = 0.370105621573926.$$

На рис. 4 представлены границы областей устойчивости методов четвертого порядка.

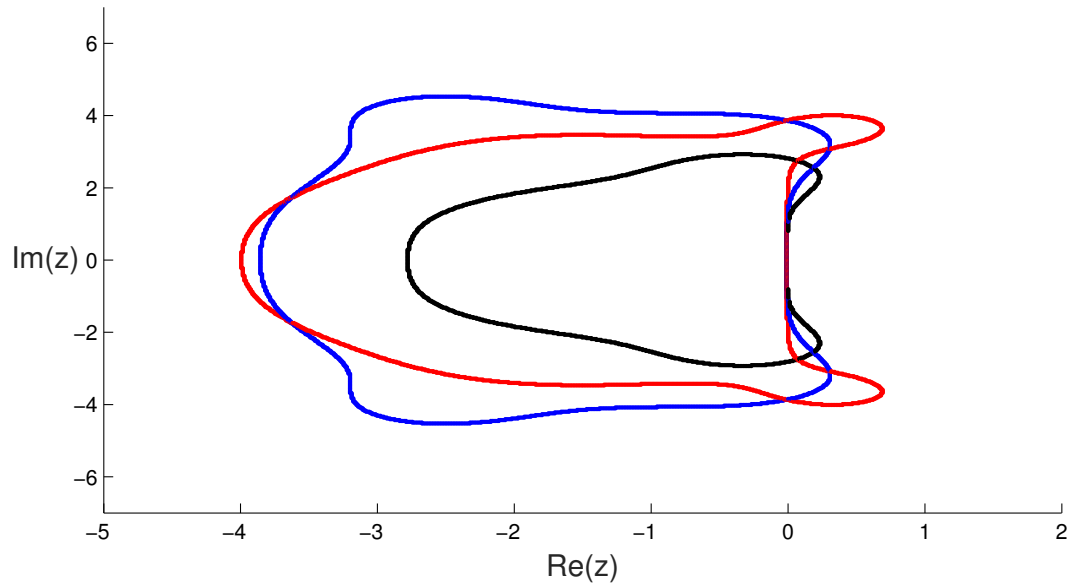


Рис. 4. Границы областей устойчивости методов 4 порядка. Синяя кривая — 2-этапный метод повышенного порядка точности при оптимальном значении c_2 по площади области, красная кривая — по протяженности, черная — 4-этапный метод Рунге–Кутты

Здесь вновь значения параметров областей устойчивости методов повышенного порядка точности больше, чем у обычного метода.

Еще один метод имеет три этапа и шестой порядок точности, его вычислительные формулы (12) и функция устойчивости имеет вид (26). Оптимальные значения входных параметров для данного метода:

$$c_2^* = 0.193602508337886, \quad \hat{a}_{32}^* = 0.024917295274148;$$

$$c_2^{**} = 0.160355405615515, \quad \hat{a}_{32}^{**} = 0.022967842562266.$$

На рис. 5 представлены границы областей устойчивости методов шестого порядка.

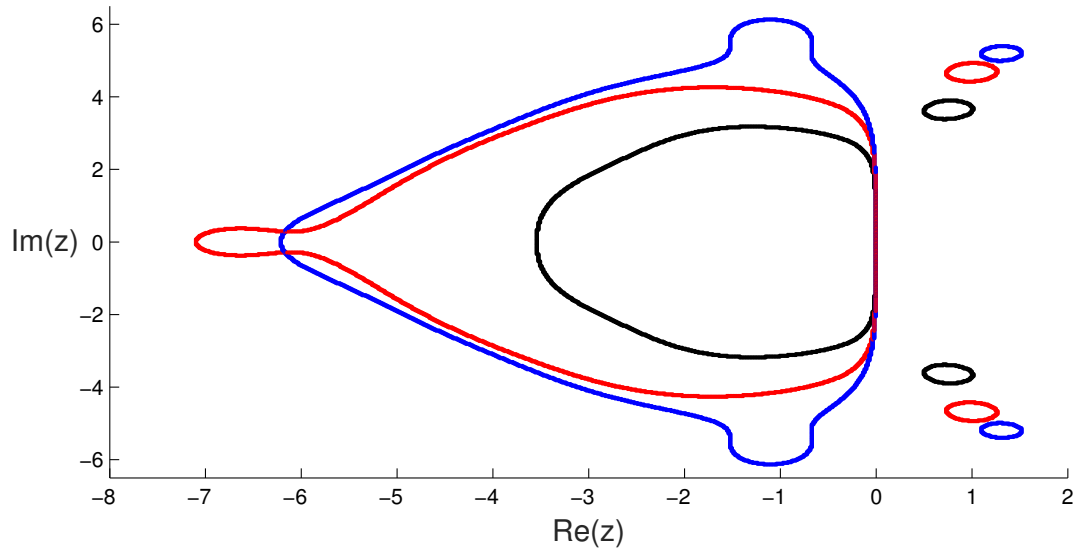


Рис. 5. Границы областей устойчивости методов 6 порядка. Синяя кривая — 3-этапный метод повышенного порядка точности при оптимальных значениях c_2, \hat{a}_{32} по площади области, красная кривая — по протяженности, черная — 7-этапный метод Рунге – Кутты

Здесь вновь видно превосходство характеристик областей устойчивости методов повышенного порядка точности.

Следующий рассмотренный метод второй подгруппы [6] из четырех этапов, имеет восьмой порядок точности. Его вычислительные формулы задаются

выражением (28), функция устойчивости имеет вид (25). Для данного метода были найдены следующие оптимальные значения входных параметров:

$$c_2^* = 0.135089975095316, \quad c_2^{**} = 0.199142288670608.$$

На рис. 6 вновь видно, что площадь и протяженность метода повышенного порядка точности больше, чем у обычного 11-этапного метода.

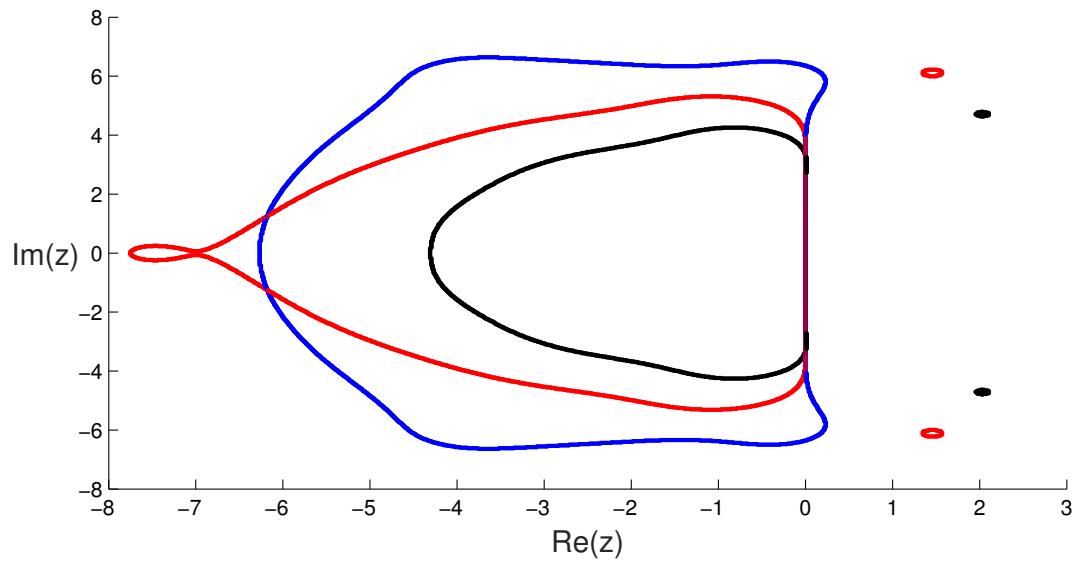


Рис. 6. Границы областей устойчивости методов 8 порядка. Синяя кривая — 4-этапный метод повышенного порядка точности при оптимальном значении c_2 по площади области, красная кривая — по протяженности, черная — 11-этапный метод Рунге – Кутты

Что примечательно, для достижения восьмого порядка рассматриваемым методом потребовалось всего четыре этапа, а обычным методам Рунге – Кутты для этого необходимо одиннадцать этапов. При этом при использовании предложенного метода улучшения устойчивости, были получены границы площади и протяженности области устойчивости метода повышенного порядка точности, которые намного превосходят границы обычного метода.

Таким образом, можно видеть, что во всех методах, рассмотренных в данной работе, площади и протяженности областей устойчивости оказывались

большими, чем для обычных методов Рунге – Кутты. Это достигалось как выбранными методами, которые используют производные решения, так и предложенным в данной работе подходом к максимизации характеристик областей устойчивости методов.

Следовательно, предложенные для улучшения устойчивости подходы: максимизация как площади области устойчивости, так и ее протяженности по отрицательной вещественной полуоси, действительно позволили стабилизировать рассматриваемые методы Рунге – Кутты повышенного порядка точности.

Глава 3. Решение тестовых задач

3.1. Исследование устойчивости разностных схем

Методы тестировались при применении метода прямых к решению задач для уравнений в частных производных [8]. Метод прямых основан на том, что уравнение дискретизуется только по одной из переменных. Для рассмотренных задач — это пространственная переменная.

Рассматривается задача для линейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t \in (0; 10], \quad x \in (0; 10], \quad a > 0.$$

Для дискретизации производной по x на равномерной сетке используется левая разностная производная. Таким образом, поставленная задача сводится к задаче Коши для линейной системы.

Сетка по пространству имеет вид: $x_i = i \cdot h$, $i = \overline{0, N}$,

$$\begin{aligned} u_i(t) &\approx u(t, x_i), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_i) &\approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \\ \frac{du_1}{dt} &= -\frac{a}{h}u_1, \quad \frac{du_i}{dt} = \frac{a}{h}(u_{i-1} - u_i), \quad i = \overline{2, N}. \end{aligned}$$

В ходе численных расчетов определялось приближенное значение параметра Куранта, определяющее границу площади области устойчивости. Рассматривался случай оптимальных значений параметров и других параметров.

Критерий устойчивости получающихся разностных схем формулируется в следующем виде:

$$\gamma \leq \tilde{\gamma},$$

где $\gamma = a \frac{\Delta t}{h}$ — число Куранта, а значение $\tilde{\gamma}$ определяется в ходе вычислительных экспериментов.

В таблицах 2–7 для сравнения представлены значения $\tilde{\gamma}$, полученные для методов при оптимальных значениях параметров и значениях параметров, представленных в работах [4, 5, 6].

α_{21}	1/3	1/2	1	α_{21}^*	α_{21}^{**}
$\tilde{\gamma}$	2.6263	3.5354	1.5152	5.1515	6.0302

Таблица 2. Значение параметра Куранта при разных значениях параметра трехэтапного метода 4 порядка

c_3	1	3/4	$(5 + \sqrt{5})/10$	4/5	2/3	c_3^*	c_3^{**}
$\tilde{\gamma}$	3.3133	3.7437	3.9139	3.5536	5.1451	5.5856	6.2462

Таблица 3. Значение параметра Куранта при разных значениях параметра трехэтапного метода 5 порядка

c_3	1/2	2/3	c_3^*	c_3^{**}
c_4	2/3	1	c_4^*	c_4^{**}
$\tilde{\gamma}$	3.5536	4.0641	5.9059	6.6967

Таблица 4. Значение параметра Куранта при разных значениях параметра четырехэтапного метода 6 порядка

c_2	2/5	c_2^*	c_2^{**}
$\tilde{\gamma}$	4.0080	3.8677	4.0080

Таблица 5. Значение параметра Куранта при разных значениях параметра двухэтапного метода 4 порядка с использованием третьей производной решения

c_2	$3/7 - \sqrt{2}/7$	c_2^*	c_2^{**}
\hat{a}_{32}	$122/7203 + 72 \cdot \sqrt{2}/7203$	\hat{a}_{32}^*	\hat{a}_{32}^{**}
$\tilde{\gamma}$	5.2305	6.2325	7.1142

Таблица 6. Значение параметра Куранта при разных значениях параметра трехэтапного метода 6 порядка с использованием третьей производной решения

c_2	0.1391	c_2^*	c_2^{**}
$\tilde{\gamma}$	6.3191	6.2766	7.7644

Таблица 7. Значение параметра Куранта при разных значениях параметра четырехэтапного метода 8 порядка с использованием третьей производной решения

Как можно видеть, наибольшие значения $\tilde{\gamma}$ характерны для методов с оптимальными значениями параметров. При этом при параметрах, при которых протяженность является наибольшей, $\tilde{\gamma}$ является большим, чем для остальных параметров.

Таким образом, схемы, основанные на оптимальных значениях параметров, позволяют производить расчеты с большим шагом по времени. Это более экономично с вычислительной стороны.

Следующая рассмотренная задача — это задача для уравнения теплопроводности.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \in (0; 10], \quad x \in (0; \pi), \quad a > 0.$$

Здесь для дискретизации производной по x на равномерной сетке используется вторая разностная производная.

Сетка по пространству имеет вид:

$$\begin{aligned} x_i &= i \cdot h, \quad i = \overline{0, N}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x_i) &\approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \\ \frac{du_i}{dt} &= \frac{a^2}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad i = \overline{2, N-2}, \\ \frac{du_1}{dt} &= \frac{a^2}{h^2}(u_2 - 2u_1), \quad \frac{du_{N-1}}{dt} = \frac{a^2}{h^2}(-2u_{N-1} + u_{N-2}). \end{aligned}$$

Критерий устойчивости получающихся разностных схем так же, как и в предыдущем случае, формулируется в следующем виде:

$$\gamma \leq \tilde{\gamma},$$

где $\gamma = a^2 \frac{\Delta t}{h^2}$ — число Куранта, а значение $\tilde{\gamma}$ определяется в ходе вычислительных экспериментов.

В таблицах 8–13 представлены значения $\tilde{\gamma}$, полученные для методов при оптимальных значениях параметров и значениях параметров, представленных в работах [4, 5, 6].

Как можно видеть, здесь также наибольшие значения параметров Куранта характерны для методов с оптимальными значениями параметров.

α_{21}	1/3	1/2	1	α_{21}^*	α_{21}^{**}
$\tilde{\gamma}$	0.6061	0.8081	0.3030	1.2121	1.5075

Таблица 8. Значение параметра Куранта при разных значениях параметра трехэтапного метода 4 порядка

c_3	1	3/4	$(5 + \sqrt{5})/10$	4/5	2/3	c_3^*	c_3^{**}
$\tilde{\gamma}$	0.8288	0.9349	0.9770	0.8889	1.2873	1.3954	1.5616

Таблица 9. Значение параметра Куранта при разных значениях параметра трехэтапного метода 5 порядка

c_3	1/2	2/3	c_3^*	c_3^{**}
c_4	2/3	1	c_4^*	c_4^{**}
$\tilde{\gamma}$	0.8889	1.0170	1.4755	1.6737

Таблица 10. Значение параметра Куранта при разных значениях параметра четырехэтапного метода 6 порядка

c_2	2/5	c_2^*	c_2^{**}
$\tilde{\gamma}$	0.9972	0.9652	0.9997

Таблица 11. Значение параметра Куранта при разных значениях параметра двухэтапного метода 4 порядка с использованием третьей производной решения

c_2	$3/7 - \sqrt{2}/7$	c_2^*	c_2^{**}
\hat{a}_{32}	$122/7203 + 72 \cdot \sqrt{2}/7203$	\hat{a}_{32}^*	\hat{a}_{32}^{**}
$\tilde{\gamma}$	1.3026	1.5551	1.7756

Таблица 12. Значение параметра Куранта при разных значениях параметра трехэтапного метода 6 порядка с использованием третьей производной решения

c_2	0.1391	c_2^*	c_2^{**}
$\tilde{\gamma}$	1.5792	1.5671	1.9399

Таблица 13. Значение параметра Куранта при разных значениях параметра четырехэтапного метода 8 порядка с использованием третьей производной решения

Еще одна рассмотренная задача — задача для уравнения конвекции-диффузии.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0, \quad \mu > 0.$$

Для дискретизации производной по x на равномерной сетке используются левая и вторая разностные производные.

Сетка по пространству имеет вид:

$$x_i = i \cdot h, \quad i = \overline{0, N},$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{a}{h}u_2 + \frac{\mu}{h^2}(u_3 - 2u_2),$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{h}(u_i - u_{i-1}) + \frac{\mu}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad i = \overline{3, N-2},$$

$$\frac{du_{N-1}}{dt} = -\frac{a}{h}u_{N-1} + \frac{a}{h}u_{N-2} + \frac{\mu}{h^2}(-2u_{N-1} + u_{N-2}).$$

Для данной задачи вычислялись площади области устойчивости на плоскости параметров $\gamma = \mu \frac{\Delta t}{h^2}$ и $\chi = a \frac{\Delta t}{h}$. Как можно видеть из таблиц 14–19, наибольшие значения вновь характерны для методов с оптимальными значениями параметров.

α_{21}	1/3	1/2	1	α_{21}^*	α_{21}^{**}
\tilde{S}	0.4481	0.6747	0.1862	0.7701	0.9722

Таблица 14. Значение площади области устойчивости на плоскости параметров γ, χ при разных значениях параметра трехэтапного метода 4 порядка

c_3	1	3/4	$(5 + \sqrt{5})/10$	4/5	2/3	c_3^*	c_3^{**}
\tilde{S}	0.3388	0.4307	0.4747	0.3893	0.8062	0.9431	1.1754

Таблица 15. Значение площади области устойчивости на плоскости параметров γ, χ при разных значениях параметра трехэтапного метода 5 порядка

c_3	1/2	2/3	c_3^*	c_3^{**}
c_4	2/3	1	c_4^*	c_4^{**}
\tilde{S}	0.3893	0.5087	1.0523	1.3526

Таблица 16. Значение площади области устойчивости на плоскости параметров γ, χ при разных значениях параметра четырехэтапного метода 6 порядка

c_2	2/5	c_2^*	c_2^{**}
\tilde{S}	0.4563	0.4273	0.4584

Таблица 17. Значение площади области устойчивости на плоскости параметров γ, χ при разных значениях параметра двухэтапного метода 4 порядка с использованием третьей производной решения

c_2	$3/7 - \sqrt{2}/7$	c_2^*	c_2^{**}
\hat{a}_{32}	$122/7203 + 72 \cdot \sqrt{2}/7203$	\hat{a}_{32}^*	\hat{a}_{32}^{**}
\tilde{S}	0.7785	1.1115	1.4468

Таблица 18. Значение площади области устойчивости на плоскости параметров γ, χ при разных значениях параметра трехэтапного метода 6 порядка с использованием третьей производной решения

c_2	0.1391	c_2^*	c_2^{**}
\tilde{S}	1.1947	1.1745	1.7897

Таблица 19. Значение площади области устойчивости на плоскости параметров γ, χ при разных значениях параметра четырехэтапного метода 8 порядка с использованием третьей производной решения

3.2. Исследование сходимости.

Сходимость построенных разностных схем исследовалась при решении двух задач с известными точными решениями. Первая рассмотренная задача — задача для уравнения переноса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \quad x > 0, \quad t > 0. \\ f(t, 0) &= 0, \quad f(0, x) = \varphi(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \in [0; 2], \\ 0, & \text{else} \end{cases} \\ f(t, x) &= \varphi(x - at). \end{aligned} \tag{29}$$

Вторая задача для исследования сходимости — это задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0. \\ f(0, x) &= 2 \sin(x), \quad f(t, 0) = f(t, \pi) = 0. \\ f(t, x) &= 2 \exp(-a^2 t) \sin(x). \end{aligned} \tag{30}$$

При исследовании сходимости вычислялась относительная погрешность численного решения для случаев сеток с различным разбиением.

На рис. 7 представлено сравнение аналитического и численного решений задачи для уравнения переноса, на рис. 8 представлены графики относительной погрешности как функции времени.

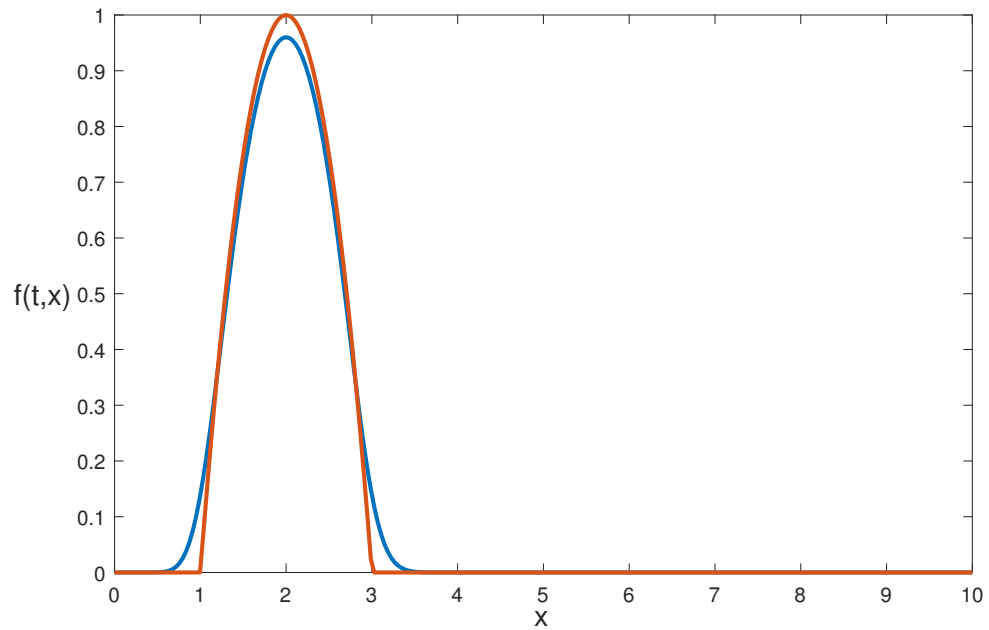


Рис. 7. Сравнение численного решения (синяя кривая) задачи переноса с её аналитическим решением (красная кривая)

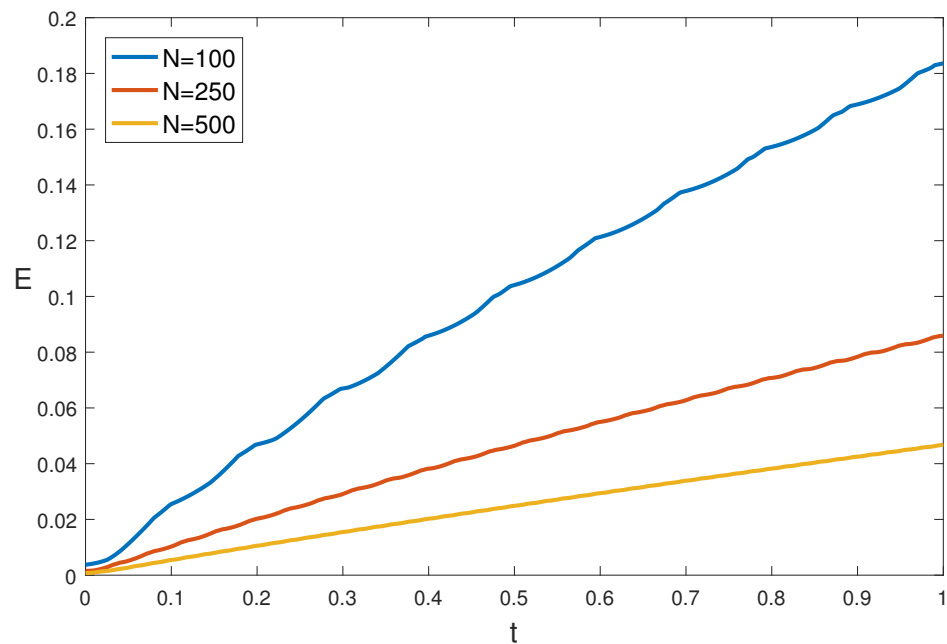


Рис. 8. Относительная погрешность метода для задачи переноса на различных сетках

Как можно видеть, при увеличении разбиения сетки погрешность уменьшается, что говорит о сходимости.

Аналогичные результаты получаются для второй задачи (см. рис. 9–10).

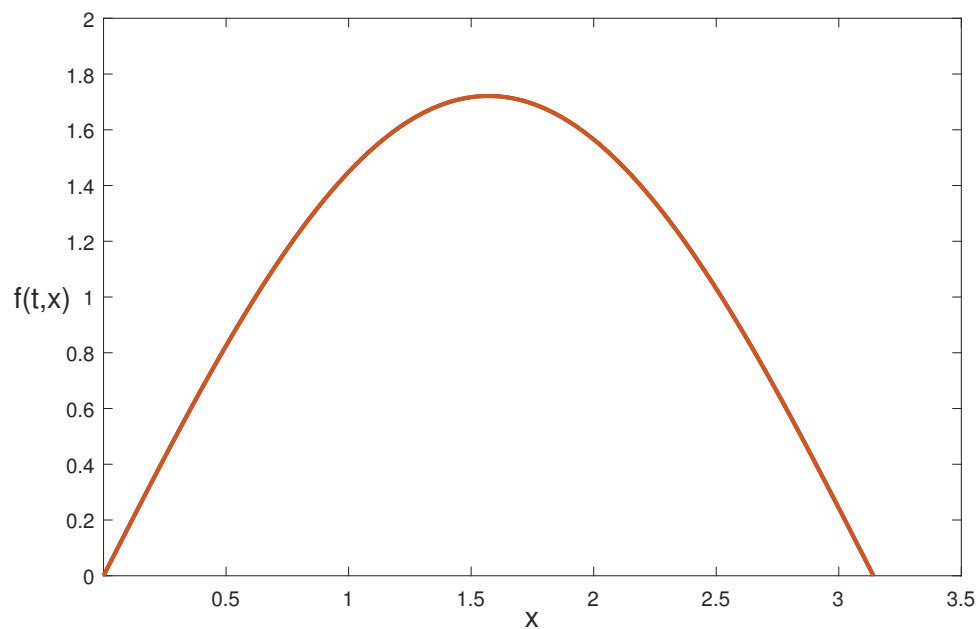


Рис. 9. Сравнение численного решения (синяя кривая) задачи теплопроводности с её аналитическим решением (красная кривая)

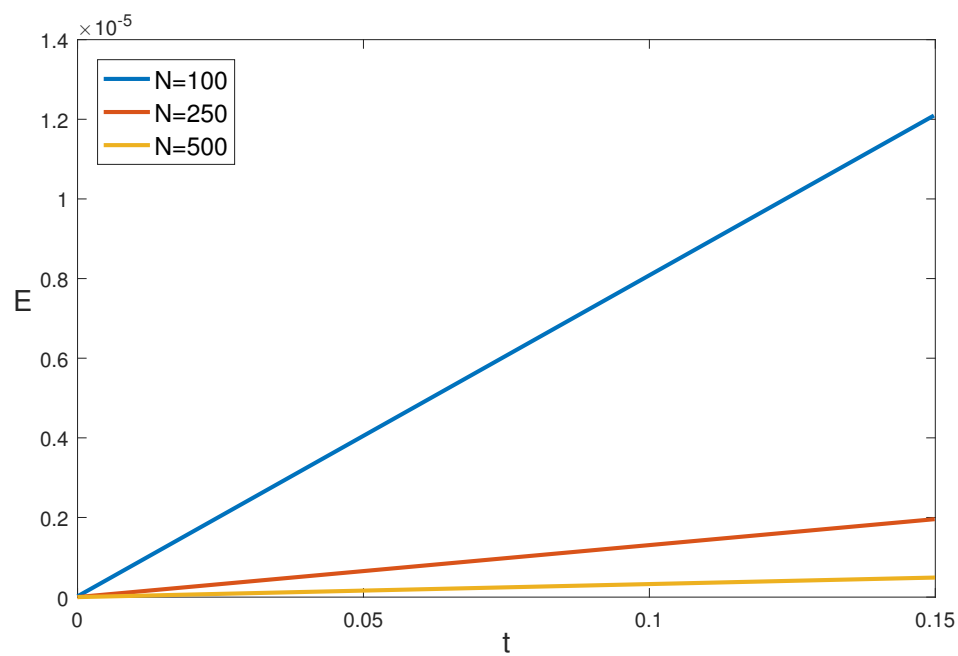


Рис. 10. Относительная погрешность метода для задачи теплопроводности на различных сетках

Таким образом, в данной главе при решении задач математической физики

было показано, что найденные значения параметров позволяют стабилизировать явные методы Рунге – Кутты повышенного порядка точности.

Заключение

Таким образом, в работе получены следующие результаты:

1. На примере явных методов повышенного порядка точности апробирован подход к стабилизации методов Рунге – Кутты.
2. Определены значения параметров методов Рунге – Кутты повышенного порядка точности, использующих первую, вторую и третью производные, при которых достигаются максимальные значения площади области устойчивости и её протяженности по отрицательной вещественной полуоси.
3. Решены тестовые задачи.

По полученным результатам можно сделать следующие выводы:

1. При решении задач показано, что предложенный подход действительно позволяет стабилизировать явные методы Рунге – Кутты.
2. Методы повышенного порядка точности могут успешно применяться при построении разностных схем для задач математической физики.

Список литературы

1. Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: МГУ, 1990. 336 с.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
3. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциально-алгебраические и жесткие задачи. М.: Мир, 1999. 688 с.
4. Goeken D., Johnson O. Runge–Kutta with higher order derivative approximations // Applied Numerical Mathematics. 2000. **34**. pp. 207 – 208.
5. Chan R., Tsai A. On explicit two-derivative Runge–Kutta methods // Numerical Algorithms. 2010. **53**. pp. 171 – 194.
6. Okten Turaci M., Ozis T. Derivation of three-derivative Runge–Kutta methods // Numerical Algorithms. 2017. **74(1)**. pp. 247 – 265.
7. Соболев И. М. Численные методы Монте–Карло. М.: Наука, 1973. 312 с.
8. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002. 840 с.